

الوحدة الأولى الحركة فى خط مستقيم

تفاضل الدوال المتجهه

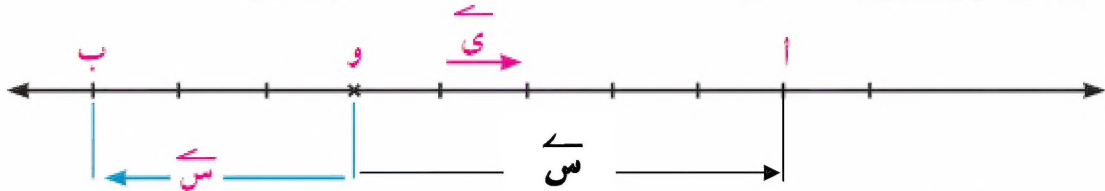
١ - ١

الحركة فى خط مستقيم:

إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم فيقال أنه يتحرك حركة خطية.

موضع الجسيم:

إذا تحرك الجسيم حركة خطية فإن موضع الجسيم سيتغير من لحظة لأخرى ولتعيين موضع الجسيم نختار نقطة ثابتة "و" كنقطة أصل ونحدد متجه وحدة \hat{u} فى اتجاه الحركة على الخط المستقيم فإذا كان الجسيم يمين نقطة الأصل يكون موضعه موجب وإذا كان يسار نقطة الأصل يكون موضعه سالب
ففى الشكل:

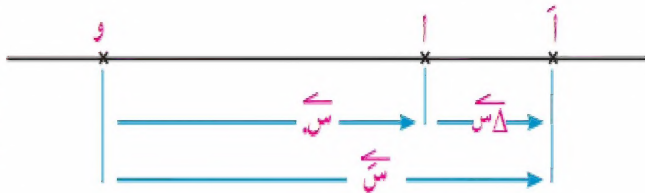


إذا كان الجسيم عند الموضع (أ) على الخط المستقيم فإن $\hat{s} = \hat{u}$

بينما إذا كان الجسيم عند الموضع (ب) على الخط المستقيم فإن $\hat{s} = -\hat{u}$

ونلاحظ أن موضع الجسيم هو كمية متجهة يمكن التعبير عنه كدالة فى الزمن أى أن $\hat{s} = \hat{s}(t)$
ويقاس معيار \hat{s} بوحدة المتر فى النظام الدولى للوحدات

الإزاحة:



تعرف إزاحة الجسيم $\Delta \hat{s}$ بأنها التغير فى موضعه

فإذا كان الجسيم عند الموضع \hat{s} وتحرك الى الموضع \hat{s}' فإن:

الإزاحة $\Delta \hat{s} = \hat{s}' - \hat{s}$ حيث $\Delta \hat{s} = \hat{s}' - \hat{s}$ ونلاحظ أن:

• الإزاحة $\Delta \hat{s}$ تكون موجبة إذا كان الموضع النهائى للجسم على يمين الموضع الابتدائى

- الإزاحة $\Delta \vec{s}$ تكون سالبة إذا كان الموضع النهائي للجسم على يسار الموضع الابتدائي
- إزاحة الجسم \vec{f} كمية متجهه يمكن التعبير عنه كدالة في الزمن أى أن $\vec{f} = \vec{f}(t)$
- إذا كان موضع الجسم عند بداية قياس الزمن عند نقطة الأصل فإن $\vec{s}_0 = 0$

متجه السرعة:

إذا كانت $\vec{f} = \Delta \vec{s}$ هى إزاحة الجسم خلال فترة زمنية Δt فإن متجه السرعة المتوسطة \vec{v} يساوى خارج قسمة الإزاحة على الزمن أى أن:

$$\frac{\vec{s}(t) - (\vec{s} + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{v}$$

ويكون متجه السرعة اللحظية \vec{v} عند أى لحظة زمنية هو:

$$\frac{\vec{s}(t) - (\vec{s} + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{v}$$

وحيث أن الطرف الأيسر هو المشتقة الأولى لمتجه الموضع

السرعة هى ميل
المماس لمنحنى
الموضع - الزمن

$$\therefore \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}$$

وحيث أن \vec{s} متجهاً ثابتاً \therefore متجه السرعة يساوى معدل تغير الإزاحة بالنسبة للزمن

السرعة هى ميل
المماس لمنحنى
الإزاحة - الزمن

$$\therefore \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v}$$

ويُقاس معيار السرعة بوحدة متر / ث فى النظام الدولى للوحدات

ملاحظة:

يمكن استخدام الرموز s, f, v للتعبير عن القياس الجبرى لمتجهات الموضع \vec{s} والإزاحة \vec{f} والسرعة \vec{v}

السرعة:

السرعة هى الكمية القياسية التى تعبر عن معيار متجه السرعة أى أن:

$$||\frac{\overline{S}}{\overline{S_N}}|| = ||\frac{\overline{S}}{\overline{S_N}}|| = ||\overline{E}|| = \text{السرعة}$$

$$|\frac{\overline{S}}{\overline{S_N}}| = |\frac{\overline{S}}{\overline{S_N}}| = |\overline{E}| = \text{السرعة}$$

مثال:

جسيم يتحرك في خط مستقيم بحيث كان موضعه \overline{S} عند أي لحظة زمنية N يعطى بالعلاقة:

$$\overline{S} = (N) = (3 + 4N - 2N^2) \text{ حيث } S \text{ مقاسة بالمتر، } N \text{ مقاسة بالثانية}$$

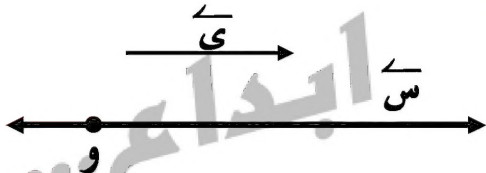
أوجد إزاحة الجسيم خلال الثواني الثلاث الأولى

ب) أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم عندما $N \in [2, 0]$

ج) أوجد متجه سرعة الجسيم عندما $N = 4$

د) من خلال منحنى الموضع - الزمن، منحنى السرعة - الزمن قم بتحليل حركة الجسيم وبين متى يغير الجسيم اتجاه حركته.

الحل:



بفرض \overline{Y} متجه وحدة في اتجاه الحركة

$$\text{أ) } \overline{S} = (N) = (3 + 4N - 2N^2) \text{ بوضع } N = 0 \therefore \overline{S} = 3 \text{ } \overline{Y}$$

$$\therefore \overline{F} = (4N - 2N^2) \overline{Y}$$

$$\therefore \overline{F} = \overline{S} - \overline{S}_0 = \overline{S} - 3 \overline{Y} = (4N - 2N^2) \overline{Y}$$

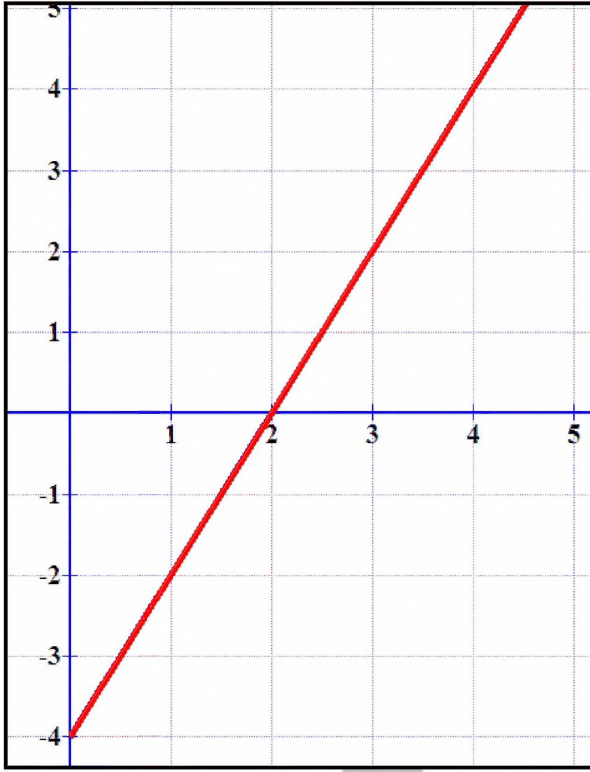
$$\text{عندما } N = 3 \therefore \overline{F} = (4 \times 3 - 2 \times 3^2) \overline{Y} = -6 \overline{Y}$$

$$\text{ب) } \therefore \overline{E} = \frac{\overline{S} \Delta}{N \Delta} = \frac{\overline{S}_2 - \overline{S}_1}{N \Delta} = \frac{\overline{S}_2 - \overline{S}_1}{N \Delta}$$

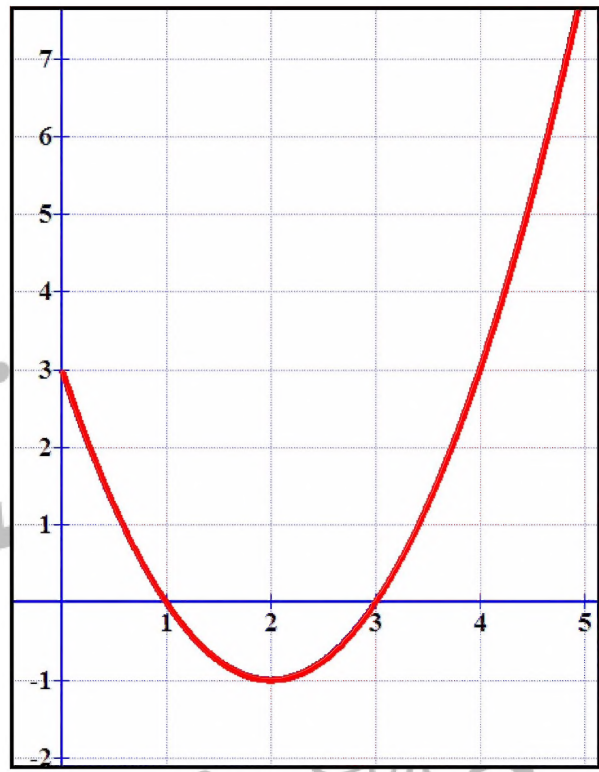
$$\therefore \overline{E} = \frac{\overline{S} \Delta}{N \Delta} = \frac{\overline{S}_2 - \overline{S}_1}{N \Delta} = \frac{\overline{S}_2 - \overline{S}_1}{N \Delta} = \frac{\overline{S}_2 - \overline{S}_1}{N \Delta}$$

$$\text{ج) } \therefore \overline{E} = \frac{\overline{S}}{N} = \frac{\overline{S}}{N} = \frac{\overline{S}}{N} = \frac{\overline{S}}{N}$$

$$\text{عندما } N = 4 \therefore \overline{E} = \frac{\overline{S}}{N} = \frac{\overline{S}}{N} = \frac{\overline{S}}{N} = \frac{\overline{S}}{N}$$



منحنى السرعة - الزمن



منحنى الموضع - الزمن

من منحنى الموضع - الزمن نلاحظ أن :

- الجسم كان على بعد ٣ متر يمين نقطة الأصل عند بداية الزمن $t = 0$
- الجسم صار عند نقطة الأصل عند $t = 1$ ، $t = 3$
- الجسم على بعد ١ متر يسار نقطة الأصل عند $t = 2$

من منحنى السرعة - الزمن نلاحظ أن :

- السرعة الابتدائية للجسم 4 م/ث عكس اتجاه y
- الجسم أصبح سرعته صفر (يسكن لحظياً) عند $t = 2$
- الجسم يغير اتجاه حركته عند $t = 2$ ويتحرك في اتجاه y

العجلة :

إذا كانت $\Delta \bar{v}$ هي التغير في متجه السرعة خلال فترة زمنية Δt فإن متجه العجلة المتوسطة $\bar{a}_{\text{متوسط}}$ يكون :

$$\bar{a}_{\text{متوسط}} = \frac{\bar{v} - (\bar{v} + \Delta \bar{v})}{\Delta t} = \frac{-\Delta \bar{v}}{\Delta t} = -\bar{a}_{\text{متوسط}}$$

ويكون متجه العجلة اللحظية $\bar{a}_{\text{لحظي}}$ عند أي لحظة زمنية هو :

$$\frac{\overline{ع} - (\overline{ع} + \overline{ن})}{\overline{ن}} = \frac{\overline{ع} \Delta}{\overline{ن} \Delta} = \frac{\overline{ع}}{\overline{ن}}$$

العجلة هي ميل
المماس لمنحنى
السرعة - الزمن

وحيث أن الطرف الأيسر هو المشتقة الأولى لمتجه السرعة

$$\therefore \frac{\overline{ع}}{\overline{ن}} = \frac{\overline{ع}}{\overline{ن}}$$

أي أن العجلة هي معدل تغير متجه السرعة بالنسبة للزمن

ويُقاس معيار العجلة بوحدة م/ث/ث أي م/ث² في النظام الدولي للوحدات

ملاحظة:

أي أن العجلة هي المشتقة
الثانية لمتجه الموضع
أو متجه الإزاحة

$$\therefore \frac{\overline{ع}}{\overline{ن}} = \frac{\overline{ع}}{\overline{ن}} = \frac{\overline{ع}}{\overline{ن}}$$

$$\therefore \frac{\overline{ع}}{\overline{ن}} = \frac{\overline{ع}}{\overline{ن}} = \frac{\overline{ع}}{\overline{ن}}$$

القياس الجبري لمتجه السرعة والعجلة:

- إذا كان $\overline{ع} < 0$ فإن $\overline{ع}$ تتزايد وهذا يعني أن الجسم يتحرك بشكل أسرع في الاتجاه الموجب أو أن الجسم يتحرك ببطء في الاتجاه السالب.
- إذا كان $\overline{ع} > 0$ فإن $\overline{ع}$ تتناقص وهذا يعني أن الجسم يتحرك ببطء أكثر في الاتجاه الموجب أو أن الجسم يتحرك بشكل أسرع في الاتجاه السالب.

الحركة المتسارعة والحركة التقصيرية:

- إذا كان متجه عجلة جسيم في فترة زمنية ما في نفس اتجاه متجه سرعته خلال تلك الفترة فإن حركة الجسيم تكون متسارعة خلال تلك الفترة وفي هذه الحالة يكون القياس الجبري لمتجهي العجلة والسرعة لهما نفس الإشارة وبالتالي فإن حاصل ضربهما يكون موجب (أي أكبر من الصفر)

∴ الحركة متسارعة ⇔ $\overline{ع}$ ، ج لهما نفس الإشارة ⇔ $\overline{ع} > 0$

- إذا كان متجه عجلة جسيم في فترة زمنية ما في اتجاه مضاف لمتجه سرعته خلال تلك الفترة فإن حركة الجسيم تكون تقصيرية خلال تلك الفترة وفي هذه الحالة يكون القياس الجبري لمتجهي العجلة والسرعة مختلفين في الإشارة وبالتالي فإن حاصل ضربهما يكون سالب (أي أصغر من الصفر)

∴ الحركة تقصيرية ⇔ $\overline{ع}$ ، ج مختلفين في الإشارة ⇔ $\overline{ع} < 0$

مثال:

إذا كان متجه سرعة جسيم \vec{v} عند أي لحظة زمنية t يعطى بالعلاقة:

$$\vec{v} = (t) - (t^2 - 6t + 5) \text{ حيث } \vec{v} \text{ متجه وحدة في اتجاه حركة الجسيم}$$

- (أ) متى يغير الجسيم اتجاه حركته؟ (ب) متى تزداد سرعة الجسيم؟ ومتى تتناقص؟
(ج) أوجد عجلة حركة الجسيم عندما تنعدم سرعته

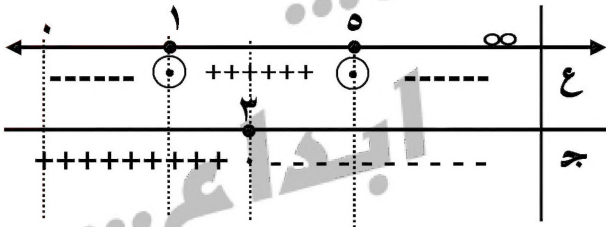
الحل:

$$\therefore \vec{v} = (t) - (t^2 - 6t + 5) \quad \therefore \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (t - t^2 + 6t - 5) = 1 - 2t + 6 = 5 - t$$

(أ) يغير الجسيم اتجاه حركته عندما تصبح سرعته تساوى صفر

$$0 = 5 - t \quad \therefore t = 5 \quad \therefore 0 = (5) - (5^2 - 6 \times 5 + 5) = 0$$

$\therefore t = 1$ أو $t = 5$ \therefore الجسم يغير اتجاه حركته عندما $t = 1$ وعندما $t = 5$



(ب) تزداد سرعة الجسيم عندما $0 < \vec{v}$

ومن بحث إشارة كل من \vec{v} ، \vec{a} نجد أن:

$$0 < \vec{v} \text{ في الفترة } [1, 5] \text{ وفي الفترة } [5, \infty)$$

وتتناقص سرعة الجسيم عندما $0 > \vec{v}$

ومن بحث إشارة كل من \vec{v} ، \vec{a} نجد أن:

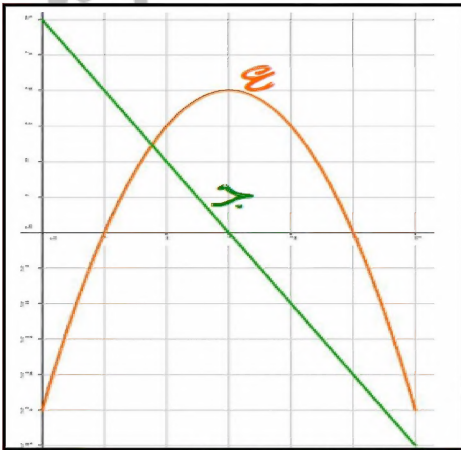
$$0 > \vec{v} \text{ في الفترة } [0, 1] \text{ وفي الفترة } [5, \infty)$$

(ج) عجلة حركة الجسيم عندما تنعدم السرعة

$$\therefore \text{السرعة تنعدم عند } t = 1 \text{ و } t = 5$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (1 - 2t + 6) = 5 - t$$

$$\therefore \vec{a} = (5 - 1) = 4 \text{ و } \vec{a} = (5 - 5) = 0$$



ملاحظات:

- إذا عاد الجسم إلى موضعه الأصلي فإن: $v = 0$
- إذا وصل الجسم إلى أقصى بعد فإن: $a = 0$
- إذا تحرك الجسم بأقصى سرعة أو بسرعة منتظمة فإن: $a = 0$

متجه العجلة عندما يكون متجه السرعة دالة في الموضع:

إذا كان $\vec{e} = d(\vec{s})$ ، $\vec{s} = d(\vec{r})$ وباستخدام قاعدة التسلسل نجد أن:

$$\boxed{\vec{e} = \frac{d\vec{s}}{ds}} \quad \Leftarrow \quad \frac{d\vec{s}}{ds} \times \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{d\vec{s}}{ds}$$

مثال:

جسيم يتحرك في خط مستقيم بحيث كانت العلاقة بين \vec{s} ، \vec{e} تعطى في الصورة $\vec{e} = \frac{5}{s+4}$ حيث \vec{e} مقاسة بوحدة م/ث ، \vec{s} مقاسة بوحدة متر أوجد عجلة الحركة عندما $s = 2$ متر

الحل:

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \frac{5}{s+4} \quad \therefore \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{5}{s+4} \\ \therefore \vec{e} &= \frac{d\vec{s}}{ds} \times \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{5}{s+4} \times \frac{5}{s+4} = \frac{25}{(s+4)^2} \\ \text{عندما } s &= 2 \text{ متر} \quad \therefore \vec{e} = \frac{25}{(2+4)^2} = \frac{25}{36} \text{ م/ث}^2 \end{aligned}$$

مثال:

جسيم يتحرك في خط مستقيم بحيث كان القياس الجبري لمتجه سرعته \vec{e} في علاقة مع القياس الجبري لمتجه موضعه \vec{s} معطاه بالصورة $\vec{e} = \frac{1}{(s-4)^2}$ أوجد \vec{e} بدلالة \vec{s} حيث \vec{e} هو القياس الجبري لعجلة الحركة ثم أوجد اصغر سرعة للجسيم المتحرك.

الحل:

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \frac{1}{(s-4)^2} \quad \text{باشتقاق الطرفين بالنسبة الى } s \\ \therefore \vec{e} &= \frac{d\vec{s}}{ds} \times \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{1}{(s-4)^2} \times \frac{1}{(s-4)^2} = \frac{1}{(s-4)^4} \\ \therefore \vec{e} &= \frac{1}{(s-4)^4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{e} = \frac{1}{(s-4)^4}} \quad \Leftarrow \quad \vec{e} = \frac{1}{(s-4)^4}$$

اصغر سرعة للجسيم المتحرك عندما $\vec{e} = 0$ ، $\therefore s = 4$

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{32}} = \frac{1}{\frac{1}{32} \pm \frac{1}{32}} = \pm 16 \quad \therefore \quad \frac{1}{32} = \frac{1}{(0-4)8} = \pm 16$$

مثال:

جسيم يتحرك في خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه السرعة E يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع S بالصورة $E^2 = 16 - 9S$ أوجد أقصى سرعة للجسيم وعجلة الحركة عندئذ

الحل:

$$\therefore E^2 = 16 - 9S \quad \text{بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى } S$$

$$\therefore \frac{E}{S} = \frac{E}{S} \quad \therefore \frac{E}{S} = \frac{E}{S} \quad \therefore \frac{E}{S} = \frac{E}{S}$$

$$\text{أقصى سرعة للجسيم تحدث عندما } S = 0 \quad \therefore \frac{E}{S} = \frac{E}{S} \quad \therefore \frac{E}{S} = \frac{E}{S}$$

$$\therefore S = 0 \quad \text{أو } S = 16 \quad \text{ويكون الحل العام هو: } S = \pi R \quad \text{حيث } R \in \mathbb{R}$$

$$\text{عندما } R \text{ عدد زوجي } \therefore S = 0 \quad \text{أو } S = 16 \quad \text{أو } S = 32 \quad \text{أو } S = 48 \quad \text{أو } S = 64 \quad \dots$$

$$\therefore \frac{E}{S} = \frac{E}{S} \quad \therefore \frac{E}{S} = \frac{E}{S} \quad \therefore \frac{E}{S} = \frac{E}{S}$$

$$\text{عندما } R \text{ عدد فردي } \therefore S = 0 \quad \text{أو } S = 16 \quad \text{أو } S = 32 \quad \text{أو } S = 48 \quad \text{أو } S = 64 \quad \dots$$

$$\therefore \frac{E}{S} = \frac{E}{S} \quad \therefore \frac{E}{S} = \frac{E}{S} \quad \therefore \frac{E}{S} = \frac{E}{S}$$

$$\therefore \text{أقصى سرعة للجسيم } E = \pm 4 \quad \text{وحدة سرعة والعجلة عندها تساوى صفر}$$

مثال:

جسيم يتحرك في خط مستقيم تبعا للعلاقة $S = P$ جال N حيث S يعبر عن القياس الجبرى لمتجه الموضع، P ، الزمن، $E \in \mathbb{R}$:

$$(أ) \text{ أوجد العلاقة بين } E, S \text{ حيث } E \text{ القياس الجبرى لمتجه السرعة. } (ب) \text{ أوجد } E \text{ عندما } S = \frac{P}{2}$$

$$(ج) \text{ أوجد الزمن المستغرق حتى يكون } S = \frac{P}{2} \text{ وأوجد عجلة الحركة عندئذ.}$$

الحل:

$$\therefore S = P \quad \text{جال } N \quad \therefore \frac{S}{N} = \frac{S}{N} \quad \therefore \frac{S}{N} = \frac{S}{N}$$

$$\therefore E = P \quad \text{جال } N \quad \therefore \frac{E}{N} = \frac{E}{N} \quad \therefore \frac{E}{N} = \frac{E}{N}$$

٢) العلاقة بين ع، س

$\therefore ع = ٢$ له جتا له ن بتربيع الطرفين $\therefore ع = ٢$ له ٢ جتا له ن
 $\therefore ع = ٢$ له ٢ (١ - جتا له ن) = له ٢ (٢ - جتا له ن) $\therefore س = ٢$ جتا له ن

$$\boxed{ع \pm له = ٢س - ٢} \quad \therefore ع = ٢$$

ب) ع عندما س = $\frac{٢}{٢}$

$$\boxed{ع \pm له = ٢س - ٢} \quad \therefore ع = ٢$$

ج) الزمن المستغرق حتى يكون س = $\frac{٢}{٢}$

$\therefore س = ٢$ جتا له ن $\therefore س = ٢$ جتا له ن $\therefore س = ٢$ جتا له ن
 $\therefore س = ٢$ جتا له ن $\therefore س = ٢$ جتا له ن $\therefore س = ٢$ جتا له ن
 $\therefore س = ٢$ جتا له ن $\therefore س = ٢$ جتا له ن $\therefore س = ٢$ جتا له ن
ويكون الحل العام هو:

$$\boxed{\frac{\pi \sqrt{2}}{٤} + \frac{\pi \sqrt{7}}{٤} = ن}$$

$$\pi \sqrt{2} + \frac{\pi \sqrt{7}}{٢} = ن$$

$$\boxed{\frac{\pi \sqrt{2}}{٤} + \frac{\pi \sqrt{7}}{٤} = ن}$$

$$\pi \sqrt{2} + \frac{\pi \sqrt{7}}{٢} = ن$$

ايجاد ج

$\therefore ج = ٢$ له ٢ جتا له ن ، جتا له ن = $\frac{١}{٢}$ بالتعويض

$$\boxed{٢ له = ج}$$

$$\therefore ج = ٢ له \times \frac{١}{٢}$$

دراسة المنحنيات:

أولاً: منحني الموضع – الزمن و منحني الإزاحة – الزمن:

- (١) الجسم يكون يمين نقطة الأصل إذا كان منحني الموضع أعلى محور السينات ويكون يسار نقطة الأصل إذا كان المنحني أسفل محور السينات.
- (٢) الجسم يعود إلى نقطة الأصل عند نقط تقاطع منحني الموضع مع محور السينات.
- (٣) الإزاحة تكون موجبه إذا كان منحني الإزاحة أعلى محور السينات وتكون سالبة إذا كان المنحني أسفل محور السينات.
- (٤) الإزاحة تنعدم عند نقط تقاطع منحني الإزاحة مع محور السينات.
- (٥) سرعة الجسم تكون موجبة إذا كان ميل المماس لمنحني الموضع (الإزاحة) موجب أى يكون المنحني متزايد وهذا يعنى أن الجسم يتحرك للأمام.
- (٦) سرعة الجسم تكون سالبة إذا كان ميل المماس لمنحني الموضع (الإزاحة) سالب أى يكون المنحني متناقص وهذا يعنى أن الجسم يتحرك للخلف.
- (٧) السرعة تنعدم عند نقط القيم العظمى والصغرى المحلية لمنحني الموضع أو الإزاحة.
- (٨) العجلة تكون موجبة إذا كان منحني الموضع (الإزاحة) محدب لأسفل.
- (٩) العجلة تكون سالبة إذا كان منحني الموضع (الإزاحة) محدب لأعلى.
- (١٠) العجلة تنعدم عند نقط الانقلاب.

ثانياً: منحني السرعة – الزمن:

- (١) السرعة تكون موجبة إذا كان المنحني أعلى محور السينات وهذا يعنى أن الحركة تكون فى الاتجاه الموجب أى أن الجسم يتحرك للأمام.
- (٢) السرعة تكون سالبة إذا كان المنحني أسفل محور السينات وهذا يعنى أن الحركة تكون فى الاتجاه السالب أى أن الجسم يتحرك للخلف.
- (٣) السرعة تنعدم عند نقط تقاطع المنحني مع محور السينات وبالتالي يتغير اتجاه الحركة عندها.
- (٤) العجلة تكون موجبة إذا كان ميل المماس للمنحني موجب أى أن المنحني متزايد.
- (٥) العجلة تكون سالبة إذا كان ميل المماس للمنحني سالب أى أن المنحني متناقص.
- (٦) العجلة تنعدم عند نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للمنحني.
- (٧) السرعة تتزايد عندما $a < 0$ (الحركة المتسارعة) وهذا يتحقق إذا كان المنحني أعلى محور السينات وميله موجب أو أسفل محور السينات وميله سالب
- (٨) السرعة تتناقص عندما $a > 0$ (الحركة التقصيرية) وهذا يتحقق إذا كان المنحني أعلى محور السينات وميله سالب أو أسفل محور السينات وميله موجب.

ثالثاً: منحني العجلة – الزمن:

- (١) العجلة تكون موجبة إذا كان المنحني أعلى محور السينات
- (٢) العجلة تكون سالبة إذا كان المنحني أسفل محور السينات
- (٣) العجلة تنعدم عند نقط تقاطع المنحني مع محور السينات

ملاحظات هامة:

- (١) متجهات الموضع والإزاحة والسرعة والعجلة كلها دوال في الزمن.
- (٢) متجه الموضع يمكن أن يحتوى أو لا يحتوى على حد مطلق ويمكن أن يبدأ أو لا يبدأ من نقطة الأصل بينما متجه الإزاحة لا يحتوى على حد مطلق ويبدأ دائما من نقطة الأصل.
- (٣) الجسم لا يتحرك على أى من منحنيات الموضع أو الإزاحة أو السرعة أو العجلة لأن الحركة تحدث دائما في خط مستقيم.
- (٤) اتجاه الحركة هو نفس اتجاه السرعة دائما.
- (٥) السرعة المتوسطة تساوى إجمالى المسافة المقطوعة على الزمن الكلى بينما متجه السرعة المتوسطة يساوى متجه الإزاحة على الزمن الكلى.

مثال:

جسيم يتحرك في خط مستقيم تبعا للعلاقة $u = 3t^2 - 2t$ حيث u مقاسة بالمتر، t بالثانية أوجد:

(أ) عجلة الحركة عندما تنعدم السرعة.

(ب) سرعته المتوسطة، متجه سرعته المتوسطة خلال الفترة $[0, 5]$.

الحل:

$$u = 3t^2 - 2t \quad \therefore \frac{du}{dt} = 6t - 2 \quad \text{و} \quad \frac{du}{dt} = 0$$

$$\therefore 6t - 2 = 0 \quad \therefore 6t = 2 \quad \therefore t = \frac{1}{3}$$

(أ) السرعة تنعدم $\therefore u = 3t^2 - 2t = 0 \quad \therefore 3t^2 - 2t = 0 \quad \therefore t(3t - 2) = 0$ أو $t = 0$ أو $t = \frac{2}{3}$ ث

$$\text{عندما } t = 0 \quad \therefore u = 0 \quad \therefore \text{عجلة} = 6t - 2 = -2 \text{ م/ث}^2$$

$$\text{وعندما } t = \frac{2}{3} \quad \therefore u = 0 \quad \therefore \text{عجلة} = 6t - 2 = 2 \text{ م/ث}^2$$

(ب) لإيجاد السرعة المتوسطة نوجد المسافة المقطوعة خلال الفترة $[0, 5]$

\therefore السرعة انعدمت عند $t = 0$ \therefore الجسم غير اتجاه حركته عند $t = 0$

\therefore المسافة المقطوعة خلال الفترة $[0, 5]$

$$= \text{القيمة المطلقة للإزاحة خلال الفترة } [0, 2] + \text{القيمة المطلقة للإزاحة خلال الفترة } [2, 5]$$

$$= |(0) - (2)| + |(5) - (2)| = 2 + 3 = 5$$

$$= |(2 \times 3 - 2^2) - (5 \times 3 - 2^2)| + |0 - (2 \times 3 - 2^2)| = |(-2) - (-7)| + |-2 - (-7)| = 5 + 5 = 10$$

$$= 10 = |(5) - (-5)| + |(-5) - (-5)| = 10$$

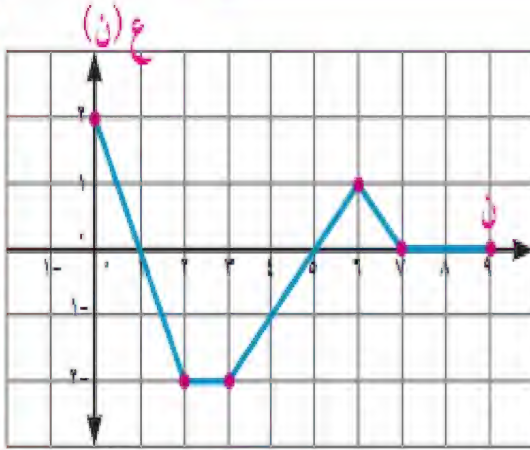
∴ السرعة المتوسطة خلال الفترة $[0, 5] = \frac{58}{5} = 11.6$ م/ث

ولإيجاد متجه السرعة المتوسطة نوجد الإزاحة خلال الفترة $[0, 5]$

∴ الإزاحة خلال الفترة $[0, 5] = f(5) - f(0) = (5) - (0) = 5$ م

∴ متجه السرعة المتوسطة $\vec{v} = \frac{5 \text{ م}}{5 \text{ ث}} = 1 \text{ م/ث}$ حيث \vec{v} متجه وحدة في اتجاه الحركة

مثال:



الشكل يبين سرعة جسيم $x = f(t)$ يتحرك في خط مستقيم

١) متى يتحرك الجسيم للأمام؟ ومتى يتحرك للخلف؟

ومتى تتزايد سرعته؟ ومتى تتباطأ؟

ب) متى تكون عجلة الحركة موجبة؟ ومتى تكون سالبة؟

ومتى تنعدم؟

ج) متى تصل سرعة الجسيم لقيمتها العظمى؟

د) متى يتوقف الجسيم لمدة أكثر من ثانية واحدة؟

الحل:

١) الجسيم يتحرك للأمام عندما تكون السرعة موجبة أى المنحنى أعلى محور السينات

∴ الجسيم يتحرك للأمام فى الفترة $[0, 1]$ وفى الفترة $[4, 6]$

والجسيم يتحرك للخلف عندما تكون السرعة سالبة أى المنحنى أسفل محور السينات

∴ الجسيم يتحرك للخلف فى الفترة $[1, 4]$

تتزايد سرعة الجسيم عندما $v > 0$

أى إذا كان المنحنى أعلى محور السينات وميله موجب أو أسفل محور السينات وميله سالب

∴ تتزايد سرعة الجسيم فى الفترة $[0, 1]$ وفى الفترة $[4, 6]$

وتتباطأ سرعة الجسيم عندما $v < 0$

أى إذا كان المنحنى أعلى محور السينات وميله سالب أو أسفل محور السينات وميله موجب

∴ تتباطأ سرعة الجسيم فى الفترة $[1, 4]$ وفى الفترة $[6, 10]$

ب) عجلة الحركة تكون موجبة عندما يكون ميل المماس موجب أى أن المنحنى متزايد

∴ عجلة الحركة موجبة فى الفترة $[0, 1]$ وفى الفترة $[4, 6]$

وعجلة الحركة تكون سالبة عندما يكون ميل المماس سالب أى أن المنحنى متناقص

∴ عجلة الحركة سالبة فى الفترة $[0, 2]$ وفى الفترة $[6, 7]$
وعجلة الحركة تنعدم عند نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للمنحنى

∴ عجلة الحركة تنعدم فى الفترة $[2, 3]$ وفى الفترة $[7, 9]$

ج) سرعة الجسم تصل لقيمتها العظمى عند $0 = v$ وفى الفترة $[2, 3]$

د) يتوقف الجسم لمدة أكثر من ثانية واحدة فى الفترة $[7, 9]$

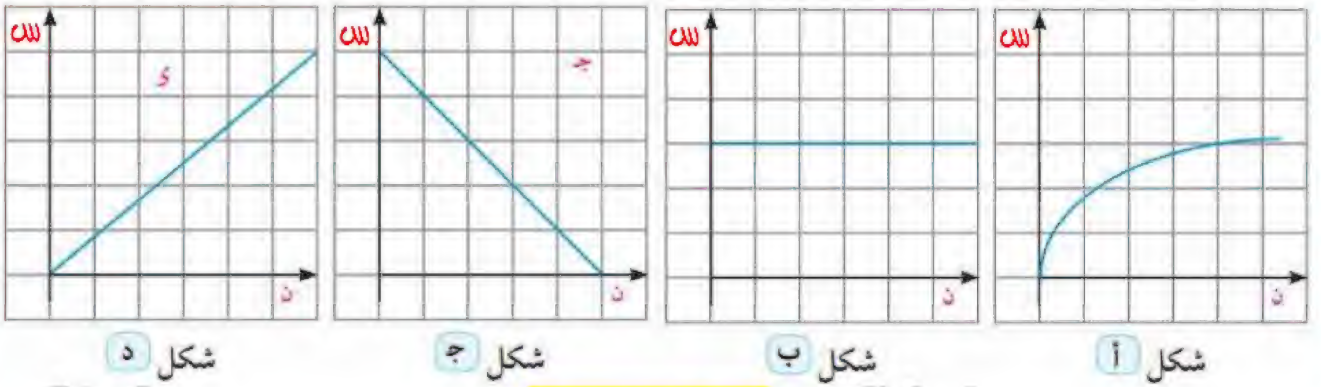
مثال:

أى من الأشكال الآتية يبين أن:

١) الجسم متوقف.

٢) الجسم يتحرك للأمام بسرعة ثابتة.

٣) الجسم يعود للخلف.



الحل:

شكل (أ)

∴ المنحنى متزايد

∴ المنحنى محدب لأعلى

∴ $a > 0$

شكل (ب)

∴ المنحنى ثابت

∴ السرعة تساوى صفر

شكل (ج)

∴ المنحنى متناقص

∴ السرعة سالبة

شكل (د)

∴ المنحنى متزايد

∴ السرعة موجبة

∴ ميل المماس للمنحنى موجب

∴ المشتقة الثانية (العجلة) سالبة

∴ هذا الشكل يبين أن سرعة الجسم تتناقص

∴ ميل المماس للمنحنى يساوى صفر

∴ هذا الشكل يبين أن الجسم متوقف

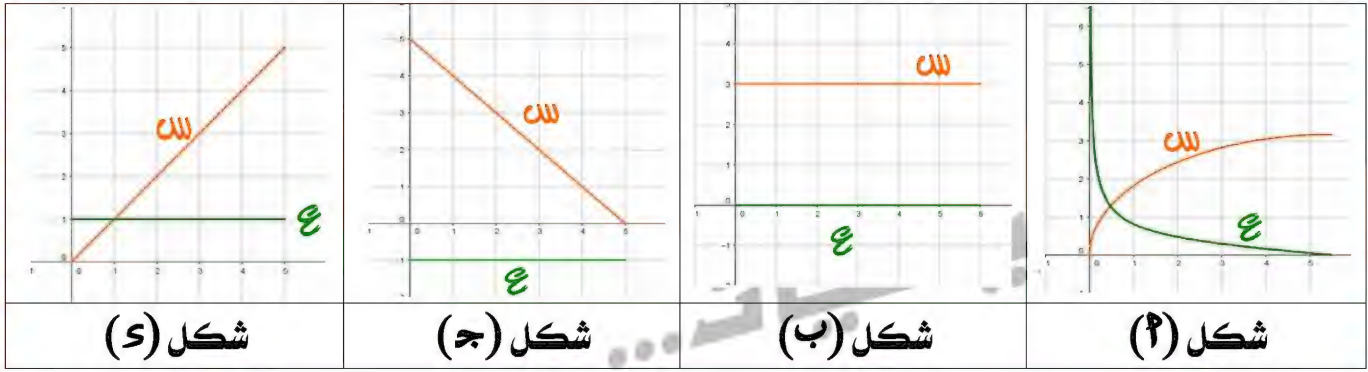
∴ ميل المماس للمنحنى سالب وثابت لأن المنحنى خط مستقيم

∴ هذا الشكل يبين أن الجسم يعود للخلف

∴ ميل المماس للمنحنى موجب وثابت لأن المنحنى خط مستقيم

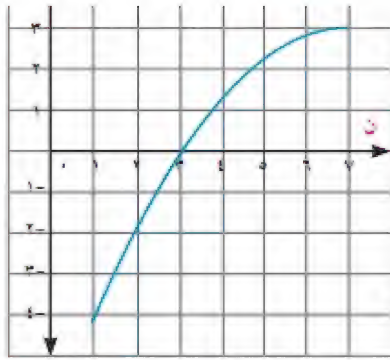
∴ هذا الشكل يبين أن الجسم يتحرك للأمام بسرعة ثابتة

وتوضح الأشكال التالية منحنيات الموضع والسرعة لكل حالة

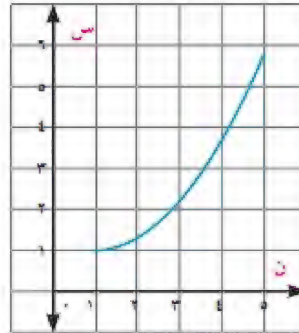


مثال:

المنحنيات التالية تمثل منحنى الموضع - الزمن حدد إشارة القياس الجبرى لمتجه السرعة فى كل منحنى ثم عين ما إذا كان الجسم يتحرك بتسارع او يتباطأ (يتحرك ببطء).



شكل (١)



شكل (٢)

شكل (٣)

الحل:

شكل (١)

- المنحنى متناقص
- المنحنى محدب لأسفل
- $a > 0$

شكل (٢)

- المنحنى متزايد
- المنحنى محدب لأسفل
- $a < 0$

شكل (٣)

- المنحنى متزايد
- المنحنى محدب لأعلى
- $a > 0$

- ميل المماس للمنحنى سالب
- المشتقة الثانية (العجلة) موجبة
- الجسم يتحرك ببطء

- ميل المماس للمنحنى موجب
- المشتقة الثانية (العجلة) موجبة
- الجسم يتحرك بتسارع

- ميل المماس للمنحنى موجب
- المشتقة الثانية (العجلة) سالبة
- الجسم يتحرك ببطء

تكامل الدوال المتجه

٢ - ١

استنتاج السرعة والإزاحة:

إذا كانت s, f, c, g هي القياسات الجبرية لمتجهات الموضع والإزاحة والسرعة والعجلة على الترتيب فإنه باستخدام التكامل الغير محدد والتكامل المحدد يمكن استنتاج السرعة والإزاحة كما يلي:

أولاً: استنتاج السرعة من العجلة:

من تفاضل الدوال المتجه نعلم أن $\frac{c}{s} = g$ وبتكامل الطرفين نجد أن:

$$[c]_s = g \therefore$$

$$\therefore [c]_s = [g]_s$$

ويمكن استبدال التكامل غير المحدد بالتكامل المحدد مع حدود التكامل المناسبة فنجد أن:
عند $s = 0$ تكون السرعة الابتدائية $c = g$ ويكون الموضع الابتدائي $s = 0$.

$$\therefore [c]_s = [g]_s \therefore [c]_s = g \therefore c - g = [c]_s - [g]_s = \text{المساحة تحت منحنى العجلة - الزمن}$$

وإذا كانت g ثابتة نجد أن: $c - g = [c]_s \therefore c = g + [c]_s$

$$\therefore c = g + [c]_s \text{ وهو القانون الأول من قوانين الحركة بعجلة منتظمة}$$

ولا تستخدم هذه الصورة الا في حالة ثبوت العجلة
أما إذا كانت العجلة دالة في الزمن فستستخدم إحدى الصور التي بها تكامل حسب معطيات المسألة.

ثانياً: استنتاج الموضع والإزاحة من السرعة:

من تفاضل الدوال المتجه نعلم أن $\frac{s}{c} = g$ وبتكامل الطرفين نجد أن:

$$[s]_c = g \therefore$$

$$\therefore [s]_c = [g]_c$$

وباستبدال التكامل غير المحدد بالتكامل المحدد مع حدود التكامل المناسبة فنجد أن:

$$\therefore [s]_c = [g]_c \therefore s - g = [s]_c - [g]_c = \text{المساحة تحت منحنى السرعة - الزمن}$$

$$\therefore f = [s]_c \text{ المساحة تحت منحنى السرعة - الزمن}$$

$$\therefore s - g = f$$

واذا كانت ج ثابتة وبالتعويض عن: $\dot{E} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N}$ فيكون $\dot{S} - \dot{S} = \dot{S} - \dot{S} = 0$

$$\dot{S} - \dot{S} = \dot{S} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N} \quad \therefore \dot{S} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N}$$

$$\therefore \dot{F} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N} \quad \text{وهو القانون الثانى من قوانين الحركة بعجلة منتظمة}$$

ثالثا: استنتاج السرعة من العجلة إذا كانت العجلة دالة فى الموضع:

من تفاضل الدوال المتجهه نعلم أن $\dot{E} = \frac{dE}{dS}$ وبالتكامل الطرفين نجد أن:

$$\therefore \int \dot{E} dS = \int \dot{S} dS$$

وباستبدال التكامل غير المحدد بالتكامل المحدد مع حدود التكامل المناسبة فنجد أن:

$$\therefore \int_{S_1}^{S_2} \dot{E} dS = \int_{S_1}^{S_2} \dot{S} dS \quad \therefore \left[\frac{1}{2} \dot{S}^2 \right]_{S_1}^{S_2} = \left[\frac{1}{2} \dot{E}^2 \right]_{S_1}^{S_2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} (\dot{E}_2^2 - \dot{E}_1^2) = \frac{1}{2} (\dot{S}_2^2 - \dot{S}_1^2) \quad \text{المساحة تحت منحنى العجلة - الإزاحة}$$

واذا كانت ج ثابتة يكون $\dot{E} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N}$

$$\therefore \dot{E} - \dot{E} = \dot{E} - \dot{E} = 0 \quad \therefore \dot{E} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N}$$

$$\therefore \dot{E} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N} \quad \text{وهو القانون الثالث من قوانين الحركة بعجلة منتظمة}$$

مثال:

جسيم يتحرك فى خط مستقيم مبتدأ من السكون وعلى بعد ٨ أمتار من نقطة ثابتة على الخط المستقيم فإذا كانت ج = ٤ - ٦ ن حيث ج مقاسة بوحدة م/ث^٢ فأوجد العلاقة بين السرعة والزمن ، كذلك العلاقة بين الإزاحة والزمن.

الحل:

$$\therefore \dot{E} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N} \quad \therefore \dot{E} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N} \quad \therefore \dot{E} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N}$$

$$\therefore \dot{E} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N} \quad \therefore \dot{E} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N} \quad \therefore \dot{E} = \dot{E} + \dot{J} \dot{N}$$

$$\therefore s = \left[\frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t \right] \quad \therefore s = \left[\frac{2}{3}(3)^3 - 4(3)^2 + 12(3) \right] = 18$$

$$\therefore s = \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t \quad \therefore \text{عندما } t = 0, \quad s = 0 \quad \therefore s = 18 \quad \therefore t = 3$$

$$\therefore \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t = 18$$

$$\therefore s = \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t \quad \therefore \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t = 18$$

حل آخر:

$$\therefore \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t = 18 \quad \therefore \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t - 18 = 0$$

$$\therefore \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t - 18 = 0$$

$$\therefore \left[\frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t - 18 \right] = 0$$

$$\therefore \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t - 18 = 0$$

$$\therefore \left[\frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t - 18 \right] = 0$$

$$\therefore \left[\frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t - 18 \right] = 0$$

مثال:

بدأت سيارة الحركة من السكون في خط مستقيم من نقطة ثابتة على الخط ويعطى القياس الجبرى لمتجه سرعتها بعد زمن t بالعلاقة $s = \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t$ حيث s مقاسة بوحدة م/ث ، t مقاسة بالثانية. أوجد كلا من عجلة الحركة وإزاحة السيارة عند $t = 2$

الحل:

$$\therefore s = \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t \quad \therefore \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t = 18$$

$$\therefore \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t = 18 \quad \therefore \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t - 18 = 0$$

$$\therefore \left[\frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t - 18 \right] = 0$$

$$\therefore \left[\frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t - 18 \right] = 0$$

مثال:

بدأت سيارة حركتها من السكون في خط مستقيم من نقطة ثابتة على الخط ويعطى القياس الجبرى لمتجه سرعتها بعد زمن t بالعلاقة $s = \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 12t$ حيث s مقاسة بوحدة م/ث ، t مقاسة بالثانية. أوجد خلال الفترة الزمنية $t \in [0, 4]$ كلا من السرعة المتوسطة و متجه السرعة المتوسطة. متى تصل سرعة السيارة إلى قيمتها العظمى؟ وأوجد مقدار العجلة عندئذ.

$$٧٥٤ \int_0^{\infty} = ٤ :: , \quad ٢٧٣ - ٧٤ = ٤ ::$$

$$32 = 2^5 - 2^4 \times 2 = 2^4 [2^1 - 2^0] = 2^4 \therefore \leftarrow \text{os}(2^1 - 2^0) \Big|_2 = 2^4 \therefore$$

∴ متجه السرعة المتوسطة $\vec{v} = \frac{-32\hat{y}}{4} = 8\hat{y}$ م/ث حيث \hat{y} متجه وحدة فى إتجاه الحركة

لإيجاد السرعة المتوسطة يجب حساب المسافة المقطوعة وحساب المسافة المقطوعة يجب معرفة هل الجسم غير اتجاه حركته أم لا؟ ولعرفة ذلك نبحث إشارة ع

بوضع ٤ = ٠ ٠ = ٤ - ٢ ٠ = ٤ - ٣

$\therefore n = 0$ أو $\frac{n}{3} = n$ ويوضح الشكل المجاور بحث إشارة n

∴ الجسم غير اتجاه حركته خلال الفترة $[t_0, t_1]$ عند $t = \frac{t_0 + t_1}{2}$

$$\therefore \text{المسافة المقطوعة خلال الفترة } [4, 0] = \int_4^0 |2t^3 - 4t| dt + \int_0^4 |2t^3 - 4t| dt$$

$$\frac{928}{27} = \left| \frac{32}{27} - 32 \right| + \frac{32}{27} = \left| \frac{2}{3} [30 - 27] \right| + \left| \frac{2}{3} [30 - 27] \right| =$$

∴ السرعة المتوسطة خلال الفترة [٥٠] = $\frac{٩٢٨}{٢٧} \div ٤ = \frac{٢٣٢}{٢٧}$ م/ث

$$٧٦ - ٤ = ج. ∴ \quad ٢٧٣ - ٧٤ = ع ∴$$

∴ سرعة السيارة تصل إلى قيمتها العظمى عندما $v = 0$ ∴ $0 = 6 - 4t$ ∴ $t = \frac{3}{2}$ ث

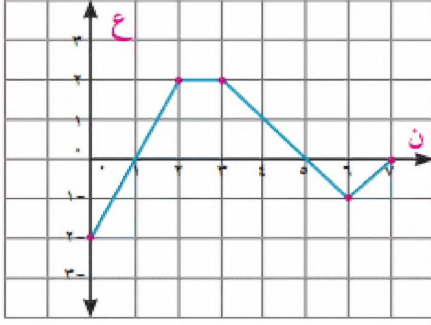
سيارة تتحرك في خط مستقيم بسرعة ابتدائية ١٢ م/ث من موضع يبعد ٤ أمتار في الاتجاه الموجب من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كان $j = -٤$ س - فأوجد:

④ ٢٤ بدلالة س

(ب) أوجد سرعة السيارة عندما $j = 0$.

② ∴ ج = س - ۴ ، ∴ [ج س] = [س س - ۴ س] = [س س س س - ۴ س س]

مثال:



من منحنى السرعة - الزمن المقابل فإن مقدار الإزاحة

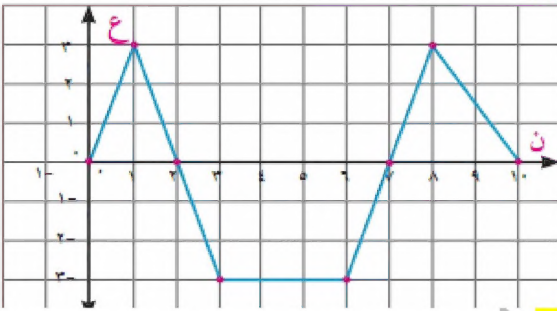
- أ ٣ وحدة طول
ب ٥ وحدة طول
ج ٧ وحدة طول
د ٨ وحدة طول

الحل:

∴ مقدار الإزاحة = المساحة بين المنحنى وفوق محور السينات - المساحة بين المنحنى وتحت محور السينات
∴ مقدار الإزاحة = مساحة شبه المنحرف - (مساحة المثلث الأول + مساحة المثلث الثانى)

$$= \frac{1}{2} \times (1 + 4) \times 2 - \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 3 \text{ وحدة طول}$$

مثال:



من منحنى السرعة - الزمن المقابل، فإن المسافة المقطوعة =

- أ ٤,٥ وحدة طول
ب ١٠,٥ وحدة طول
ج ١٣,٥ وحدة طول
د ١٩,٥ وحدة طول

الحل:

∴ المسافة المقطوعة = المساحة بين المنحنى وفوق محور السينات + المساحة بين المنحنى وتحت محور السينات
∴ المسافة المقطوعة = (مساحة المثلث الأول + مساحة المثلث الثانى) + مساحة شبه المنحرف

$$= \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \right) + \left(\frac{1}{2} \times (3 + 0) \times 4 \right) = 12 + (3 + 4,5) = 19,5 \text{ وحدة طول}$$

مثال:

قذف جسيم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦ م/ث من نقطة على ارتفاع ٤,٥ متر من سطح الأرض
أوجد كل من ع، س بدلالة ن ثم أوجد أقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم عن سطح الأرض.

الحل:

∴ الجسم قذف رأسيا لأعلى ∴ ج = -5 = -9.8 ∴ ع = 0 ∴ $0 = -5t^2 + 9.8t$

∴ $0 = -5t^2 + 9.8t$ ∴ $0 = t(-5t + 9.8)$ ∴ $t = 0$ ∴ $t = 1.96$

∴ عند $t = 0$ تكون $h = 0$ ∴ $h = 0$ ∴ $0 = -5t^2 + 9.8t$ ∴ $0 = t(-5t + 9.8)$ ∴ $t = 0$ ∴ $t = 1.96$

∴ $0 = -5t^2 + 9.8t$ ∴ $0 = t(-5t + 9.8)$ ∴ $t = 0$ ∴ $t = 1.96$ ∴ $h = 0$ ∴ $h = 0$ ∴ $0 = -5t^2 + 9.8t$ ∴ $0 = t(-5t + 9.8)$ ∴ $t = 0$ ∴ $t = 1.96$

∴ عند $t = 0$ تكون $h = 0$ ∴ $h = 0$ ∴ $0 = -5t^2 + 9.8t$ ∴ $0 = t(-5t + 9.8)$ ∴ $t = 0$ ∴ $t = 1.96$

أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عندما $h = 0$ ∴ $h = 0$ ∴ $0 = -5t^2 + 9.8t$ ∴ $0 = t(-5t + 9.8)$ ∴ $t = 0$ ∴ $t = 1.96$

∴ $0 = -5t^2 + 9.8t$ ∴ $0 = t(-5t + 9.8)$ ∴ $t = 0$ ∴ $t = 1.96$ ∴ $h = 0$ ∴ $h = 0$ ∴ $0 = -5t^2 + 9.8t$ ∴ $0 = t(-5t + 9.8)$ ∴ $t = 0$ ∴ $t = 1.96$

**مثال:**

يتحرك جسم في خط مستقيم مبتدئاً من نقطة ثابتة على المستقيم فإذا كان القياس الجبرى لسرعة بعد (ن) ثانية من لحظة البدء يعطى بالعلاقة $(3 - 5n + 2n^2)$ سم/ث أوجد:
اولاً: بعد الجسم عن نقطة البدء بعد ٦ ثوان.
ثانياً: المسافة المقطوعة في الثانية السادسة من حركته.

الحل:

∴ $(3 - 5n + 2n^2) = 0$ ∴ $0 = 3 - 5n + 2n^2$ ∴ $0 = 2n^2 - 5n + 3$ ∴ $0 = (2n - 3)(n - 1)$ ∴ $n = 1$ ∴ $n = 1.5$

اولاً: بعد الجسم عن نقطة البدء بعد ٦ ثوان

∴ $0 = 3 - 5n + 2n^2$ ∴ $0 = 2n^2 - 5n + 3$ ∴ $0 = (2n - 3)(n - 1)$ ∴ $n = 1$ ∴ $n = 1.5$

∴ $0 = 3 - 5n + 2n^2$ ∴ $0 = 2n^2 - 5n + 3$ ∴ $0 = (2n - 3)(n - 1)$ ∴ $n = 1$ ∴ $n = 1.5$

عند $n = 6$ ∴ $0 = 3 - 5n + 2n^2$ ∴ $0 = 2n^2 - 5n + 3$ ∴ $0 = (2n - 3)(n - 1)$ ∴ $n = 1$ ∴ $n = 1.5$

ثانياً: المسافة المقطوعة في الثانية السادسة من حركته.

لحساب المسافة المقطوعة يجب معرفة هل الجسم غير اتجاه حركته أم لا؟ ولمعرفة ذلك نضع $h = 0$

∴ $0 = 3 - 5n + 2n^2$ ∴ $0 = 2n^2 - 5n + 3$ ∴ $0 = (2n - 3)(n - 1)$ ∴ $n = 1$ ∴ $n = 1.5$

$$\therefore 0.5 = \frac{\sqrt{37} + 5}{2} = u \quad \text{أو} \quad 0.5 = \frac{\sqrt{37} - 5}{2} = u$$

∴ الجسم غير اتجاه حركته خلال الثانية السادسة

$$\therefore f = \left| \left| \frac{1}{2}u^2 - 5u + 3 \right| \right|_{0.5}^6 + \left| \left| \frac{1}{2}u^2 - 5u + 3 \right| \right|_{0.5}^0 = 1.5 \text{ سم}$$

$$\begin{aligned} & \left| \left| \frac{1}{2}u^2 - 5u + 3 \right| \right|_{0.5}^6 + \left| \left| \frac{1}{2}u^2 - 5u + 3 \right| \right|_{0.5}^0 = \\ & 1.5 \text{ سم} = \frac{3}{2} = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \left| \frac{110}{3} - 36 \right| + \left| \frac{215}{6} - \frac{110}{3} \right| = \end{aligned}$$

ملاحظة:

يمكن إيجاد المسافة المقطوعة فى الثانية السادسة بدون بحث هل الجسم غير اتجاه حركته أم لا؟ وذلك بحساب التكامل المحدد باستخدام الآلة الحاسبة كما يلى:

$$\therefore f = \left| \left| \frac{1}{2}u^2 - 5u + 3 \right| \right|_{0.5}^6 = 1.5 \text{ سم}$$

مثال:

إذا كانت العجلة التى يتحرك بها جسيم على خط مستقيم $(5 - 4t)$ م/ث² حيث f بعد الجسيم عن نقطة البدء، فإذا بدأ الجسيم حركته بسرعة $10\sqrt{3}$ م/ث. فأوجد أقصى بعد للجسيم عن نقطة البدء.

الحل:

$$\therefore (5 - 4t) = a \quad \therefore \left[\frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \right] = \left[\frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \right]$$

$$\therefore \left[\frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \right] = \left[\frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \right] \quad \therefore \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$\therefore \text{عندما } f = 0 \quad 10\sqrt{3} = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad \therefore 10\sqrt{3} = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$\therefore \text{أقصى بعد للجسيم عندما } a = 0 \quad \therefore \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$\therefore 0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad \therefore \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$\therefore 0 = (10 + 2f)(10 - f) \quad \therefore 10 = f \quad \text{أو} \quad f = \frac{10}{2}$$

∴ أقصى بعد للجسيم عن نقطة البدء = 10 م